Domácí úkol ze cvičení 9:

1. Vyšetřete absolutní, případně neabsolutní konvergenci řady:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$; c) $1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{2}{9}+\ldots\ldots$.

2. V závislosti na parametru $x \in R$ vyšetřete, zda konverguje absolutně, resp. konverguje neabsolutně, resp. diverguje řada

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}(x-2)^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n(n+1)}(x+3)^n$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

3. Ukažte, že alternující řada

   $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = \frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\ldots\ldots$$

   diverguje, i když $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

A navíc, chcete-li :

4. Vyšetřete konvergenci řady:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n}}-1)$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n}}-1-\frac{1}{n})$;

   (možná se hodí , že $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ (víte z přednášky)).

5. Rozhodněte (a také odůvodněte), zda platí:

   a) Když řada $\sum_{n=1}^{\infty}a_n = a_1+a_2+\ldots$ konverguje, pak konverguje také řada $\sum_{n=1}^{\infty}a_{k_n}=a_{k_1}+a_{k_2}+\ldots$, kde $1 \le k_1 < k_2 \ldots.$.

   b) Když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$.

   c) Když konvergují řady $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$ a $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n)^2$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ konverguje absolutně.

   d) Když konvergují řady $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ konverguje absolutně.